Rang d'une matrice

Déf : Le rang d'une matrice $n \times m$ est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes.

$A = (v_1 | \dots | v_m)$, $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. $\operatorname{rang}(A) := \dim \operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_m)$ $(\leq \min\{n, m\})$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_3 = v_1 + v_2$

$\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3) = 2$

Proposition : Soit $A \in \operatorname{Mat}(n \times m)$ et $E_\ell = \begin{array}{cc} & j_0 \\ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \lambda \\ & & 1 \end{pmatrix} & - i_0 \end{array} \in \operatorname{Mat}(\ell \times \ell)$ une matrice élémentaire. Alors :

(a) $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A E_m)$

(b) $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(E_n A)$

Preuve : (a) Colonnes de $A = \{v_1 \dots v_m\}$.

Colonnes de $AE_m = \{v_1, \dots, v_{j_0 - 1}, v_{j_0} + \lambda v_{i_0}, \dots, v_m\}$.

On a $\operatorname{Vect}(v_1 \dots v_n) = \operatorname{Vect}(\;\text{''}\;) \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(AE_m)$.

(b) Montrons que $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\}$ est une famille libre

$\Leftrightarrow \{E_n v_{j_1}, \dots, E_n v_{j_k}\}$ l'est.

Ça implique $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(E_n A)$.

$\Rightarrow$ On sait $\forall \lambda_i$, $\sum \lambda_i v_{j_i} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$.

Soit $\sum \lambda_i E_n v_{j_i} = 0$ On a donc $E_n v = 0$. On montre que $v = 0$
$\quad\;\; \shortparallel$
$E_n \underbrace{\sum \lambda_i v_{j_i}}_{\shortparallel \atop v}$. et donc par hypothèse, $\lambda_i = 0 \;\; \forall i$.

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $E_n v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i_0} + \lambda x_{j_0} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = 0$.

(⇐) On sait que $\sum \lambda_i E_n v_{j_i} = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$.

Si $\sum \lambda_i v_{j_i} = 0 \Rightarrow 0 = E_n 0 = E_n\left(\sum \lambda_i v_{j_i}\right) = \sum \lambda_i E_n v_{j_i}$

$\Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$ OK. □

Rmq : Une propriété analogue est valide pour $E = P$ permutation :

$$\begin{array}{c} \\ i_0 \\ j_0 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \qquad\quad i_0 \quad\; j_0 \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1_{\ddots 1} & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = P_{i_0,j_0}$$

et $E = D$ matrice diagonale avec $\mu_j \neq 0 \ \forall j$ $\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_l \end{pmatrix}$.

• Or, on a vu que, par la méthode du pivot de Gauss (par lignes) $\exists N_1, \dots, N_k$ ($M_j \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ élémentaires, permutations) t.q.

$$\underbrace{N_k \dots N_1}_{N} \cdot A = U =$$

pivots.

Par la proposition, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(U) = \#$ pivots (lignes) $(= \#$ lignes $\neq 0)$

• Par la méthode du pivot de Gauss (par colonnes), $\exists M_1 \dots M_k$ ($M_j \in \mathrm{Mat}(m \times m)$ élémentaires, permutations) t.q.

$$A \cdot \underbrace{M_1 \dots M_k}_{M} = L =$$

pivots

Par la proposition, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(L) = \#$ pivots (colonnes) $(= \#$ colonnes $\neq 0)$

Corollaires : # pivots (par ligne) = # pivots (par colonne).

Corollaire : $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^tA)$

Preuve : appliquer la méthode du pivot par lignes pour A équivaut à appliquer la méthode du pivot par colonnes pour ${}^tA$.

Corollaire : $\text{rang}(A) = \dim \text{Vect}\{\text{vecteurs lignes de } A\}$.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $w_1 = (3,-1,2)$ $w_2 = (4\ 2\ 6)$ $w_3 = (1,0,1)$ $w_4 = (2\ 1\ 3)$

$2w_1 + w_2 = w_3$
$w_2 = 2w_4$ $\rightsquigarrow \dim \text{Vect}(w_1, w_2, w_3, w_4) = 2 = \text{rang}(A)$

Matrices (carrées) inversibles

Question : ¿ Est-ce que $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$?

⚠ NON : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

De même façon, en général $\underset{A \neq 0}{AB = AC} \not\Rightarrow B = C$.

Mais propriété de simplification vaut quand A est inversible.

Déf : $A \in \text{Mat}(n \times n)$ matrice carrée. On dit que A est inversible si $\exists B \in \text{Mat}(n \times n)$ t.q. $AB = BA = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition : Si A est inversible, la matrice B comme ci-dessus est unique et appelée matrice inverse de A, et notée $B =: A^{-1}$.

Preuve : Soient B, C deux matrices t.q. $AB = BA = AC = CA = I$.

$\Rightarrow$ ~~BA~~

Alors $\underbrace{BA}_{I}\overbrace{AC}^{I} = B\cdot I = B$
$ = I\cdot C = C$ $\Rightarrow B = C.$ $\square$

Exemples : I est inversible, $I^{-1} = I$.

E élémentaire est inversible $E = \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -\lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

P permutation est inversible $P^{-1} = P$.

D diagonale $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ $\mu_j \neq 0 \Rightarrow D$ inversible, $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\mu_n} \end{pmatrix}$.

Rmq : Si A, B inversibles, alors AB l'est, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}B = B^{-1}B = I.$ analogue pour $(AB)(B^{-1}A^{-1})$.

Question : A, B inversibles, ¿ Est-ce que $A+B$ est inversible ?)

NON : Ex : $A = I$, $B = -I$ inversibles, $A+B = 0$ pas inversible.

Question : A, B pas inversibles. ¿ Est-ce que $A+B$ n'est pas inversible ?

NON : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow A+B = I$ inversible.

pas inversibles

Rmq : A inversible $\Rightarrow {}^tA$ inversible, et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

$AA^{-1} = I \rightsquigarrow {}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^tI = I. \rightarrow ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$

Rmq : A inversible $\Rightarrow A^{-1}$ inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Théorème. Soit $A \in Mat(n \times n)$. Les faits suivants sont équivalents:

(a) A est inversible.

(b) $\exists B,\ BA = I$

(c) $\exists C,\ AC = I$

(d) $\forall v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.\ Av = 0 \Rightarrow v = 0.$

(e) $\text{rang}(A) = n.$

Preuve: $(a \Rightarrow b, c)$ évident.

$(b \Rightarrow d)$ $\quad Av = 0 \Rightarrow \underbrace{BA}_{=I}v = B0 = 0 \Rightarrow v = 0$ OK

$(d \Leftrightarrow e)$ $\quad (d) \Leftrightarrow$ les colonnes de A sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n.$

$(e \Rightarrow c)$ $\quad \text{rang}(A) = n \Leftrightarrow$ les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ $\forall w \in \mathbb{R}^n\ \exists v \in \mathbb{R}^n : Av = w.$

Soit $e_1 \dots e_n$ la base canonique $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} {-j}$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\forall j = 1 \dots n,\ \exists v_j \in \mathbb{R}^n,\ Av_j = e_j.$

Soit $C = \begin{pmatrix} v_1 | \cdots | v_n \end{pmatrix}$. Alors $AC = \begin{pmatrix} Av_1 | \cdots | Av_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 | \cdots | e_n \end{pmatrix} = I.$ OK.

$(e \Rightarrow b)$ $\quad \text{rang}\, A = \text{rang}\, {}^tA = n.$ On applique $e \Rightarrow c$ pour ${}^tA$, et on a, $\exists D,\ {}^tA D = I.$ On transpose: ${}^tD A = {}^tI = I.$ $B = {}^tD$ est la matrice cherchée.

$(b + c \Rightarrow a)$ On a $BA = I,\ AC = I. \Rightarrow \overbrace{BA}^{I}C = B\underbrace{AC}_{I} = C$ $\Rightarrow B = C.$ et $AB = BA = I.$ OK $\square$

Corollaire: A ou B non inversible $\Rightarrow AB$ non inversible.

Preuve: si B n'est pas inversible, pour (d), $\exists v \neq 0$, $Bv = 0$

$\Rightarrow ABv = 0$ et AB n'est pas inversible
$$ABv = A0 = 0$$

Si B est inversible, A non inversible: $\exists w \neq 0$; $Aw = 0$

$\exists v \neq 0 : Bv = w$. $\Rightarrow ABv = Aw = 0$ et AB n'est pas inversible $\square$

Le théorème nous donne une façon de calculer l'inverse d'une matrice.

Si on trouve des solutions pour $A v_j = \underbrace{e_j}_{\text{base canonique}}$, $j = 1 \dots n$, alors $A^{-1} = (v_1 | \dots | v_n)$.

Si on veut résoudre les n systèmes en même temps, on a

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n \\ \left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow (A | I)$$

En appliquant la méthode du pivot de Gauss (par lignes), on peut trouver N matrice (inversible, donnée comme produit d'élémentaires, permutations et diagonales inversibles) t.q. $NA = I$.

$$\leadsto N(A|I) = (I|B) \qquad \text{On a donc: } NA = I,\ N = B$$
$$N(A|I) = (NA|N) \qquad \text{d'où } B = N = A^{-1}.$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{N_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}} \begin{array}{c} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{array} \overset{N_1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{N_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \overset{N_2 N_1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix} = N_3} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \overset{N_3 N_2 N_1}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)}$$

$N_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\qquad N_4\cdots N_1 \qquad$ $N_5=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\qquad N_5\cdots N_1 = A^{-1}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2-L_3 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&2&2&-1\\ 0&0&-2&-1&-2&1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} L_1-L_2 \\ L_2 \\ L_3/-2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-2&-1&1\\ 0&1&0&2&2&-1\\ 0&0&1&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Remq: On a pu compléter l'algorithme car # pivots $=n$.

Cas $n=2$: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. ~~Car~~

si $a\neq 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a&b&1&0\\ c&d&0&1 \end{array}\right) \to \begin{cases} L_1 \\ aL_2-cL_1 \end{cases}\left(\begin{array}{cc|cc} a&b&1&0\\ 0&\underbrace{ad-bc}_{=\,\Delta}&-c&a \end{array}\right) \to \begin{cases} \Delta L_1-bL_2 \\ L_2 \end{cases}\left(\begin{array}{cc|cc} \Delta a&0&\overset{ad}{\overset{\shortparallel}{\Delta+bc}}&-ab\\ 0&\Delta&-c&a \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} L_1/a \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} \Delta&0&d&-b\\ 0&\Delta&-c&a \end{array}\right).$$

A inversible ssi $ad-bc =: \underset{\text{dét}(A)}{\underset{\shortparallel}{\Delta}} \neq 0$. déterminant de A.

$$\to A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.$$

¿ Est-ce que cette solution peut être généralisée en toute dimension?